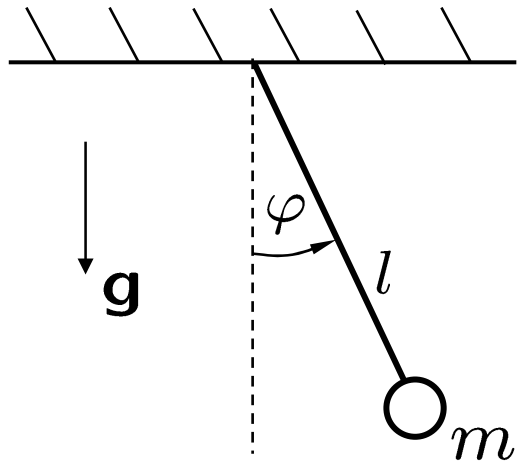
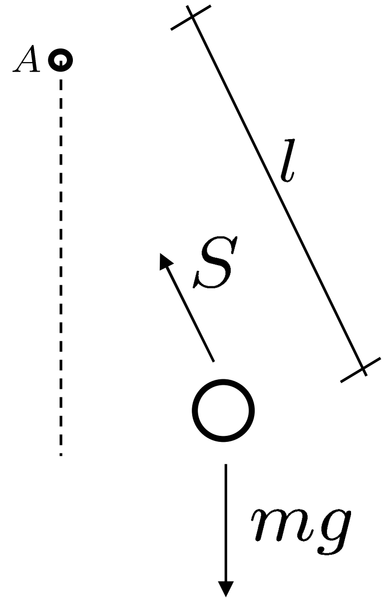
1. Pendel-DGL





$$\Theta_A = ml^2$$

Momentensatz um A

$$\Theta_A \ddot{\varphi} = -mgl \sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

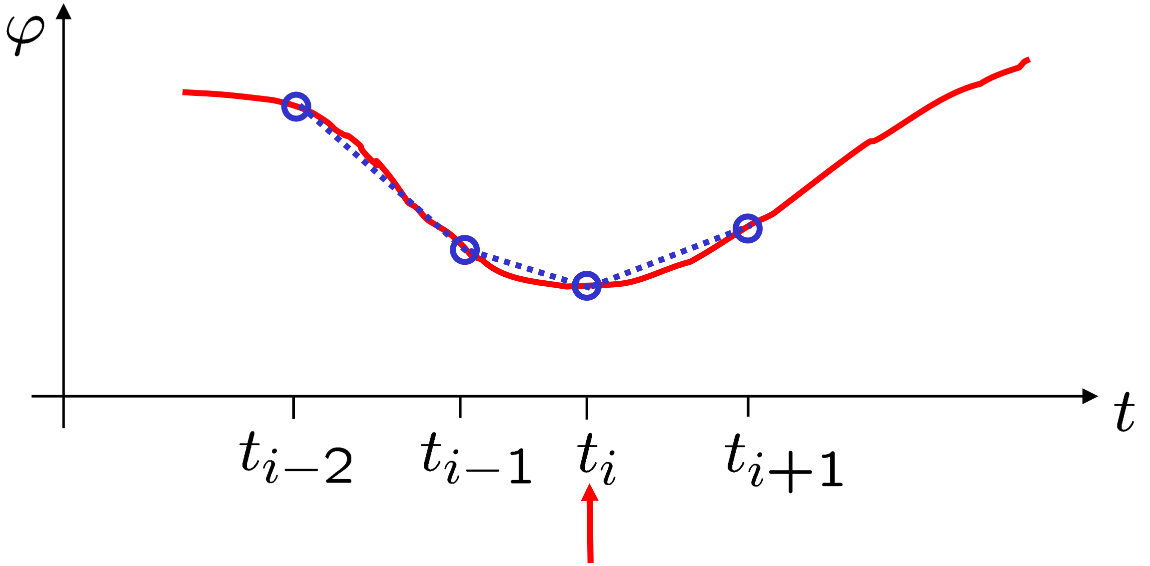
Entdimensionierung: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Linearisierung: $\sin\varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \ldots - \ldots$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0}$$

für kleine Winkel !

2. Zeitdiskretisierung & Differenzenquotienten



Approximation der Ableitung:

$$\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_i} \approx \frac{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)}{t_{i+1}-t_i} \approx \frac{\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}$$

„VorwärtsDQ“ ***„RückwärtsDQ“***

DGL 1. Ordnung: $\dot{\varphi} = f[\varphi(t), t]$

... jeweils Auflösen nach $\varphi(t_{i+1})$

„VorwärtsDQ“: $$\varphi(t_{i+1}) = \varphi(t_i) + \Delta t\, f[\varphi(t_i), t_i]$$

Explizite Darstellung

„RückwärtsDQ“: $$\varphi(t_{i+1}) = \varphi(t_i) + \Delta t\, f[\varphi(t_{i+1}), t_{i+1}]$$

Implizite Darstellung

3. Verfahren „Erster Ordnung“

Lösen der SchwingungsDGL nach Substitution: $\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0$

$$z_1(t) = \varphi(t) \qquad \dot{z}_1(t) = z_2(t)$$

$$z_2(t) = \dot{\varphi}(t) \qquad \dot{z}_2(t) = \ddot{\varphi}(t) = -\tfrac{g}{l}\sin\varphi(t)$$

$$z_1^{i+1} = z_1^i + \Delta t\, z_2(t_i)$$

$$z_2^{i+1} = z_2^i + \Delta t\,(-\tfrac{g}{l}\sin[z_1(t_i)])$$

Explizite Lösung aus „VorwärtsDQ“

$$z_1^{i+1} = z_1^i + \Delta t\, z_2(t_{i+1})$$

$$z_2^{i+1} = z_2^i + \Delta t\,(-\tfrac{g}{l}\sin[z_1(t_{i+1})])$$

Implizite Lösung aus „RückwärtsDQ“

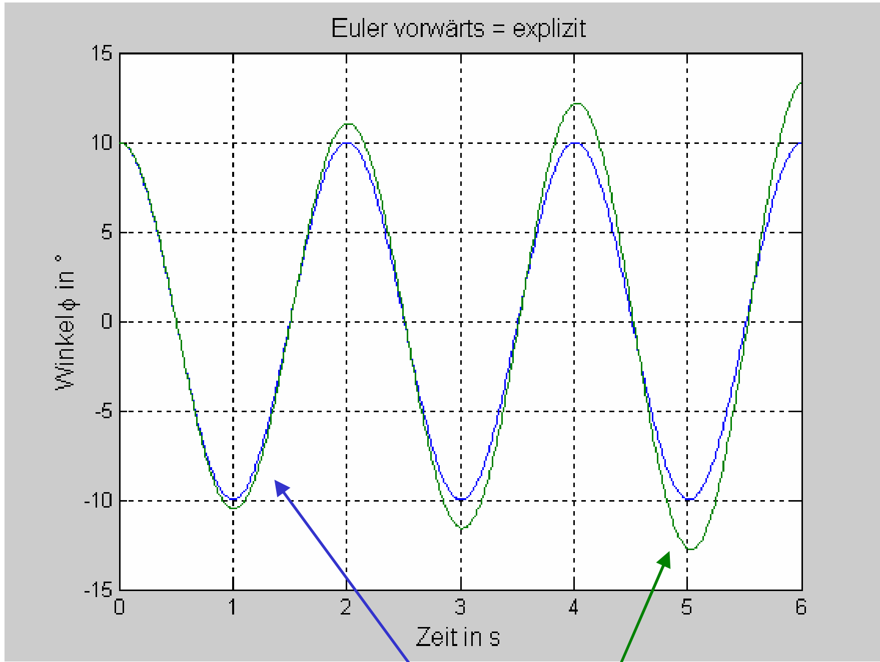
Lokale Iteration !

Beispiel für „explizit“ mit MatLab für

$$\Delta t = 0.1\ \mathrm{s}$$

$$\Delta t = 0.01\ \mathrm{s}$$

$$\Delta t = 0.001\ \mathrm{s}$$

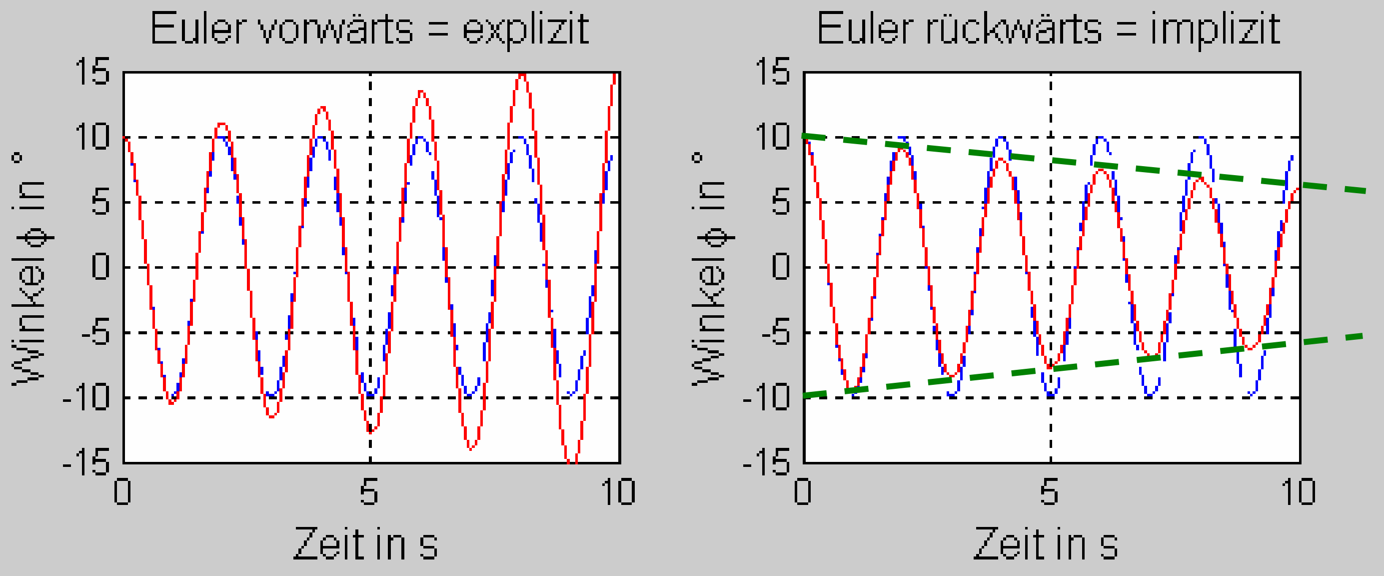


Lösung für 0.01 s

exakte Lösung

mit

$$l = 1\ \mathrm{m} \qquad g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$$



Numerische Dämpfung !

$$l = 1 \text{ m} \qquad g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$$