FH Bingen — „Berechnungsverfahren im Maschinenbau“, WiSe ’06/’07
Priv.–Doz. Dr.–Ing. H. Baaser
Freudenberg Forschungsdienste KG, CAE
Stand: 10.01.2007

Zum *Tensor*-Begriff

Zunächst:
Definition eines *Tensors 1. Stufe*, den wir oft als (Spalten)Vektor darstellen.
Später:
Verallgemeinerung auf *Tensoren beliebiger Stufe*, wobei Tensoren 2. Stufe, auch *Dyaden* genannt, in der Festkörper–/Kontinuumsmechanik in Form der *Spannungs*– und *Verzerrungstensoren* eine entscheidende Rolle spielen. Die Verknüpfung solcher Tensoren 2. Stufe wird durch Angabe eines Materialmodells in Form von Tensoren 4. Stufe hergestellt.

Vektordarstellung

Wir beschreiben mit

$$\vec{X} = x_1\vec{f}_1 + x_2\vec{f}_2 + ... + x_n\vec{f}_n \tag{1}$$

einen (Spalten–)Vektor, wobei x_i (mit $i = 1, ..., n$) als *Koordinaten* oder *Komponenten* des Vektors $\vec{X}$ bzgl. einer beliebigen Basis $\vec{f}_1...\vec{f}_n$ bezeichnet werden. Diese Basis soll *orthonormal* in $\mathbb{R}^n$ sein und kann durch die Matrix

$$\boldsymbol{F} := \{\vec{f}_1\, \vec{f}_2 \, ... \, \vec{f}_n\} \in \mathbb{R}^{(n,n)} \tag{2}$$

dargestellt werden. Man nennt $\boldsymbol{F}$ *orthogonal*, weil $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}$, also $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}^{-1}$ gilt; mit $\boldsymbol{I}$ als Einheitsmatrix.
Ebenso lässt sich

$$\vec{X} = X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2 + ... + X_n\vec{e}_n \tag{3}$$

mit den *Einheitsvektoren* $\vec{e}_n$ (mit $i = 1, ..., n$) angeben. Mit (1) und (2) können wir auch

$$\vec{X} = \boldsymbol{F} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \vec{X} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{X} \tag{4}$$

schreiben.

Darstellung in anderem Basissystem

Bezüglich einer weiteren orthonormalen Basis

$$\boldsymbol{G} := \{\vec{g}_1\,\vec{g}_2\,...\,\vec{g}_n\} \in \mathbb{R}^{(n,n)} \tag{5}$$

ergibt sich ebenso

$$\vec{X} = \boldsymbol{G} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{X} \tag{6}$$

analog zu (4) mit $z_1, ..., z_n$ als Koordinaten von $\vec{X}$ bzgl. $\{\vec{g}_1\,\vec{g}_2\,...\,\vec{g}_n\}$.

Transformation

Mit $(6)_2$ und $(4)_1$ lässt sich

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} &= \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} &= \boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

angeben, wobei $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$ gilt.
Dies entspricht also einer *Transformation* von Koordinaten–Vektoren bzgl. $\vec{f}_i$ in Koordinaten–Vektoren bzgl. $\vec{g}_i$.
$[x_1\,x_2\,...\,x_n]^{\mathrm{T}}$ und $[z_1\,z_2\,...\,z_n]^{\mathrm{T}}$ sind die Koordinaten–Vektoren von $\vec{X}$ jeweils bzgl. der Basen $\vec{f}_i$ und $\vec{g}_i$.

Definition

Der Vektor $\vec{X}$ ist ein *Tensor 1. Stufe*, weil seine Komponentendarstellung vom Koordinatensystem abhängt und dieser das obige Transformationserhalten (7) zeigt.
Ein *Tensor 1. Stufe* ist also festgelegt durch

i) die Angabe eines Koordinatensystems und

ii) die Komponenten bzgl. dieses Koordinatensystems.

Schlussfolgerung und Anmerkung

Für $i = 1, 2, 3$, also $n = 3$, befinden wir uns im EUKLIDischen Raum $\mathbb{E}^3$, der unseren *physikalischen* Raum (in *Weltkoordinaten*) beschreibt. Damit, und nur dann, stellen die Komponenten X_i als Vektordarstellung $[X_1\, X_2\, X_3]^{\mathrm{T}}$ (ohne Angabe einer Basis) obigen **Tensor** dar und wir nehmen stillschweigend $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ als Basissystem an.

Verallgemeinerung

Die Herleitung einer solchen Transformationsbeziehung (7) lässt sich analog auch für die Komponenten eines Tensors der Ordnung m im $\mathbb{R}^n$ durchführen. Diese ergibt sich allgemein zu

$$T^*_{i_1 \ldots i_m} = A_{i_1\, j_1}\, A_{i_2\, j_2} \cdots A_{i_m\, j_m}\, T_{j_1 \ldots j_m}\,, \tag{8}$$

wobei die Komponenten der Transformationsmatrix $\boldsymbol{A}$ jeweils den sog. *Richtungscosinus* $\{\cos \angle(\vec{e}^{\,*}_k, \vec{e}_l)\}$ für die Transformation der Komponenten $T_{j_1 \ldots j_m}$ bzgl. einer Basis mit $\vec{e}_l$ (mit $l = 1, ..., n$) in die Komponenten $T^*_{i_1 \ldots i_m}$ bzgl. $\vec{e}^{\,*}_k$ (mit $k = 1, ..., n$) dargestellt wird. Auch in diesem verallgemeinerten Fall ergeben sich für die Definition eines Tensors die oben genannten Bedingungen !

Für $n = 3$ hat $\boldsymbol{A}$ also insgesamt 3^m Komponenten.

Literatur

BRONSTEIN, I.N. (1989). *Taschenbuch der Mathematik*. Teubner, Leipzig.

FINCKENSTEIN, VON, K. (1990). *Grundkurs Mathematik für Ingenieure*. 2. edn. B.G. Teubner. Stuttgart.

IBEN, H.K. (1999). *Tensorrechnung*. 2. edn. B.G. Teubner.